# Сложностные аспекты предикатного описания дополнительных ограничений в распознавании образов

Таханов Рустем Серикович
Московский Физико-Технический Институт
email: takhanov@mail.ru

# Оглавление

# Глава 0

# Введение

Характерной особенностью задач решаемых посредством методов распознавания[2, 6, 10, 8, 4, 7] является сложность количественного описания или моделирования сущностных процессов исследуемых систем. При этом, порой практически устраивающим исследователя решением является отображение из заранее заданных множества начальных информаций(называемых дальше объектами) во множество ответов. Информация же о виде этой зависимости задается в виде конечного массива прецедентов вида «объект - ответ». Таким образом, с формальной точки зрения есть все предпосылки рассматривать задачу распознавания образов как частный случай задачи экстраполяции функции.

Очевидная неполнота информации, заданной в конечной структуре (массив прецедентов) об искомом отображении, которое, вообще говоря, может определяться бесконечным числом степеней свободы, привела исследователей к разработке большого числа моделей алгоритмов. Модель алгоритмов, или иначе говоря, некоторое подмножество отображений из множества объектов во множество ответов, должна была сыграть роль той недостающей информации для полного либо частичного восстановления искомого отображения. При этом, разработанные модели алгоритмов, как правило, были основаны на интуитивных эвристических соображениях, вроде удовлетворения искомого отображения условиям гладкости, краткости описания, структурной простоты, линейности и т. д.

Удобным и часто используемым способом описания дополнительных ограничений являются предикатные пары. Примером такого описания служат монотонные функции[27], которые можно определить как множество функций, которые сохраняют некоторые частичные порядки на множествах значений и определения. В общем случае, задаются два предиката одинаковой арности, и функция должна каждый набор, удовлетворяющий первому предикату, переводить в набор, удовлетворяющий второму.

Заметим, что для всякого способа(языка) описания дополнительных ограничений возникают свои чисто математические вопросы, которые в распознавании образов в первую очередь связаны либо со сложностными аспектами(то есть трудоемкость работы с этим языком), либо с обобщающей способностью(качество получаемых алгоритмов).

В данной работе мы, в основном, концентрируемся на первом аспекте. Здесь, в первую очередь, подразумевается классификация предикатных ограничений со сложностной точки зрения. Специфика задач распознавания заключается в том, что весьма желательным свойством предикатной пары, задающей дополнительные ограничения, является возможность эффективно разрешить оптимизационную задачу согласования дополнительных ограничений с ограничениями обучающей выборки(массива прецедентов). И потому интерес представляет вопрос о характеризации таких предикатных пар.

Работа состоит из двух глав.

Первая глава посвящена характеризации предикатных ограничений с эффективно-разрешимой задачей согласования с обучающей выборкой. Одним из подходов к ее получению является классификация пар по свойствам предиката на множестве значений, при произвольном предикате на множестве определения. Показана связь такой постановки с замкнутыми классами предикатов и функций многозначной логики. Дана полная классификация эффективно согласуемых с обучающей выборкой предикатных ограничений в булевом случае. В общем случае, введен важный с практической точки зрения порядковый класс предикатов и показана его эффективная разрешимость. Заметим, что в исследованиях по задаче «Обобщенная выполнимость»[15, 23, 24] рассматривалась похожая проблема. В этих работах ставилась задача описания предикатных пар, для которых нахождение сохраняющей пару функции может быть проведено эффективно.

Во второй главе рассматривается практически важная задача минимальной коррекции обучающей выборки для построения на основе скоректированной монотонного отображения. Показывается, что эта задача в общем случае NP-трудна. Рассматривается ее частный случай, когда частичный порядок на множестве значений имеет размерность 2. Данная задача сводится к квадратично-вогнутому программированию. Кроме того, для нее строится приближенный полиномиальный алгоритм решения.

# Глава 1

# О предикатных ограничениях с эффективно-разрешимой задачей согласования с обучающей выборкой

## 1.1 Постановка задачи

Задачей распознавания образов является построение неизвестной функциональной зависимости. Для нее характерно задание двух типов ограничений на искомую функциональную зависимость. Первый тип ограничений определяется так называемой обучающей выборкой — множеством элементов области определения с известными значениями искомой функции на них. Эти ограничения называются прецедентными. Ограничения второго типа, называемые дополнительными, представляют собой априорные знания о виде искомой зависимости, например, о ее монотонности, гладкости, линейности и т.д.

Распространенным видом последних ограничений являются ограничения, задаваемые предикатными парами[27]. При заданных предикатах одинаковой арности на множествах определения и значений, такие ограничения требуют от функции сохранения данной предикатной пары. Иначе говоря, рассматривая множества определения и значений как реляционные модели, требуется, чтобы искомая функция была их гомоморфизмом. Типичным примером являются ограничения монотонности, которые задаются частичными порядками.

В общем случае правомерно поставить вопрос о том, насколько ограничения второго типа являются жесткими, то есть можно ли «частично» нарушать их. Мы, однако, будем считать, что задача распознавания образов сводится к нахождению, при заданной предикатной паре, функции, сохраняющей эту пару, и максимально согласованной с обучающей выборкой. Таким образом, прецедентные ограничения могут, в принципе, быть противоречивыми и не обязаны удовлетворятся в точности, а ограничения задаваемые предикатами — точны.

Нас интересует вопрос о том, при каких предикатных ограничениях задача максимального согласования с обучающей выборкой является эффективно разрешимой с алгоритмической точки зрения. Такая постановка требует уточнения, выраженного в следующих определениях.

**Определение 1.** Пусть задана модель $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$, где $P_i^{m_i}$ есть предикат арности $m_i$, заданный на множестве $A$. Сигнатурой модели $H$ называется последовательность $(m_1, ..., m_k)$.

**Определение 2.** Пусть задана конечная модель $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$. Назовем задачей $FTS\,(H)$(Fitting to Training Set) оптимизационную задачу, входом для которой является некоторая конечная модель $I = (B, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$ (с той же сигнатурой что и $H$) и конечный набор троек $\Pi = \{(x_i, y_i, w_i)\,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^n$. Длиной входа считаем $\sum\limits_{i=1}^{k} |B|^{m_i} + (n+1)\,|B| + n\,|A| + \sum\limits_{i=1}^{n} \lceil \log w_i \rceil$. Требуется найти

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left[f\left(x_i\right) = y_i\right] \to \max_{f \in Hom(I,H)},$$

где $Hom\,(I, H)$ — множество гомоморфизмов из $I$ в $H$.

Таким образом, параметром всякой задачи являются лишь предикаты на множестве значений, или, иначе говоря, модель множества значений. И под задачей классификации мы подразумеваем задачу перечисления таких моделей $H$, для которых $FTS\,(H)$ является эффективно разрешимой задачей.

В распознавании образов, как правило, бывает фиксированным не только модель $H$, но и бесконечная модель множества определения(описаний объектов) $I$, входом же служит лишь прецедентное множество $\Pi$. Однако классификация таких проблем по параметрам $I, H$ является более трудной задачей. Предложенный же вариант классификации относительно $H$ может быть так же оправдан тем, что множество значений в задачах распознавания является конечным, и реляционная структура на нем бывает достаточно простой, чтобы явно проверить выполнение критериев эффективной разрешимости $FTS\,(H)$. Эффективная же разрешимость $FTS\,(H)$, в свою очередь, гарантирует, что оптимальная функция может быть эффективно найдена для любой конечной модели $I$ (о которой можно думать как об объединении обучающей и контрольной выборок).

**Определение 3.** Пусть задано множество $A$ и на нем задан класс предикатов $S = \{\rho_\alpha^{n_\alpha} \subseteq A^{n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Если для любой модели $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$, где $P_i^{m_i} \in S$, задача $FTS\,(H)$ является разрешимой на машине Тьюринга за полиномиальное от длины входа число шагов, то $S$ называется эффективно разрешимым классом.

Заметим, что эффективно разрешимые классы предикатов образуют частичный порядок по включению. Интерес представляет вопрос о характеризации максимальных элементов данного порядка, то есть таких классов, которые не содержаться ни в каких других. Назовем такие классы максимальными. Очевидна теорема.

**Теорема 1.** Задача $FTS\,(H)$ полиномиально разрешима тогда и только тогда, когда все предикаты модели $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ принадлежат одному из максимальных классов предикатов.

Для дальнейшего нам также понадобится следующее определение. Напомним, что оптимизационная задача называется NP-трудной[16], если используя ее решатель в качестве оракула, можно распознать один из NP-полных языков за полиномиальное от длины входа время. Везде дальше мы считаем, что $P \neq NP$.

**Определение 4.** Пусть задано множество $A$ и на нем задан класс предикатов $S = \{\rho_\alpha^{n_\alpha} \subseteq A^{n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Если существует модель $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$, где $P_i^{m_i} \in S$, такая, что задача $FTS\,(H)$ является NP-трудной, то $S$ называется NP-трудным классом.

## 1.2 Алгебраическая структура эффективно разрешимых классов предикатов

Рассмотрим алгебраические свойства эффективно разрешимых классов предикатов.

**Определение 5.** Диагональю множества $A$ называется бинарный предикат $diag\,(A) = \{(a, a)\,|a \in A\}$.

**Предложение 1.** Если $S$ — эффективно разрешимый класс предикатов, то $S \cup \{diag\,(A)\}$ также эффективно разрешим.

**Доказательство.** Рассмотрим $FTS\,(H)$, где $H = (A, diag(A), P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $P_i^{m_i} \in S$. Покажем, что эта задача полиномиально разрешима.

Входом для нее является модель $I = (B, Q, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$, где $Q$ — бинарный предикат и выборка $\Pi = \{(x_i, y_i, w_i)\,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^n$.

Заметим, что если $Q^*$ — минимальная эквивалентность содержащая $Q$ (получить такую эквивалентность из $Q$ можно за $O\left(|B|^2\right)$ шагов), то замена $Q$ на $Q^*$ в модели $I$ не изменит множества $Hom\,(I, H)$. Отсюда можно считать, что $Q$ — эквивалентность.

Обозначим $\overline{B}$ множество классов эквивалентностей относительно отношения $Q$ и для любого $b \in B$, $\overline{b}$ — класс эквивалентности содержащий $b$, а $\overline{Q_i^{m_i}} = \left\{\left(\overline{b_1}, ..., \overline{b_{m_i}}\right) | (b_1, ..., b_{m_i}) \in Q_i^{m_i}\right\}$. Тогда рассмотрим модель $\overline{I} = \left(\overline{B}, \overline{Q_1^{m_1}}, ..., \overline{Q_k^{m_k}}\right)$ и выборку $\overline{\Pi} = \left\{\left(c, y, \sum\limits_{x_j \in c, y_j = y} w_j\right) | c \in \overline{B}, y \in A\right\}$. Модель и выборка могут быть построены за $O\left(n|B|^{\max m_i + 1}\right)$ шагов. Так как $FTS\left(\overline{H} = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})\right)$ разрешима за полиномиальное от длины входа число шагов, то подав на вход этому алгоритму модель $\overline{I}$ и выборку $\overline{\Pi}$, получим функцию $\overline{f} = \underset{g \in Hom\left(\overline{I}, \overline{H}\right)}{\arg\max} \sum\limits_{c \in \overline{B}, y \in A} \left(\sum\limits_{x_j \in c, y_j = y} w_j \left[g\left(c\right) = y\right]\right)$. Определив $f\left(x\right) = \overline{f}\left(\overline{x}\right)$, получим, что $f = \underset{g \in Hom(I, H)}{\arg\max} \sum\limits_j w_j \left[g\left(x_j\right) = y_j\right]$. Отсюда следует, что $FTS\left(H\right)$ также полиномиально разрешима, ч.т.д.

Для любого $m$-местного предиката $\rho$ и произвольной перестановки $\sigma : [m] \to [m]$ определим $\rho^\sigma = \left\{\left(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}\right) | (x_1, ..., x_m) \in \rho\right\}$. Здесь и далее $[m] = \{1, ..., m\}$.

**Предложение 2.** Если задан $S$ — эффективно разрешимый класс предикатов и $m$-местный предикат $\rho \in S$, то для любой перестановки $\sigma$, $S \cup \{\rho^\sigma\}$ также эффективно разрешим.

**Доказательство.** Рассмотрим $FTS\left(H\right)$, где $H = (A, \rho^\sigma, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $P_i^{m_i} \in S$. Пусть вход содержит модель $I = (B, Q, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$. Тогда $Hom\left(I, H\right) = Hom\left(I', H'\right)$, где $H' = (A, \rho, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $I' = \left(B, Q^{\sigma^{-1}}, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k}\right)$. Следовательно, если полиномиально разрешима $FTS\left(H'\right)$, то полиномиально разрешима и $FTS\left(H\right)$.

**Предложение 3.** Если задан $S$ — эффективно разрешимый класс предикатов и $m$-местный предикат $\rho \in S$, то $S \cup \{\rho \times A\}$ также эффективно разрешим.

**Доказательство.** Рассмотрим $FTS\left(H\right)$, где $H = (A, \rho \times A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $P_i^{m_i} \in S$. Пусть вход содержит модель $I = (B, Q, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$. Тогда $Hom\left(I, H\right) = Hom\left(I', H'\right)$, где $H' = (A, \rho, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $I' = (B, \left\{(x_1, ..., x_m) | (x_1, ..., x_{m+1}) \in Q\right\}, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$. Следовательно, если полиномиально разрешима $FTS\left(H'\right)$, то полиномиально разрешима и $FTS\left(H\right)$.

**Предложение 4.** Если задан $S$ — эффективно разрешимый класс предикатов и $m$-местный предикат $\rho \in S$, то $S \cup \{\{(x_1, ..., x_{m-1}) | (x_1, ..., x_m) \in \rho\}\}$ также эффективно разрешим.

**Доказательство.** Рассмотрим $FTS\left(H\right)$, где $H = (A, \left\{(x_1, ..., x_{m-1}) | (x_1, ..., x_m) \in \rho\right\}, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $P_i^{m_i} \in S$. Пусть вход содержит модель $I = (B, Q, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$. Введем новые модели $H' = (A, \rho, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $I' = (B \cup Q^{copy}, Q', Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$, где $Q^{copy}$ — множество всех копий элементов $Q$. Копию $(x_1, ..., x_{m-1}) \in Q$ будем обозначать

$(x_1, ..., x_{m-1})'$. А $Q' = \left\{ \left( x_1, ..., x_{m-1}, (x_1, ..., x_{m-1},)' \right) | \, (x_1, ..., x_{m-1},) \in Q \right\}$. Тогда для любого $f \in Hom\,(I', H')$ справедливо, что $f|_B \in Hom\,(I, H)$. И наоборот, для любого $f \in Hom\,(I, H)$ существует $g \in Hom\,(I', H')$, что $g|_B = f$. Следовательно, если полиномиально разрешима $FTS\,(H')$, то полиномиально разрешима и $FTS\,(H)$.

**Предложение 5.** Если задано $S$ — эффективно разрешимый класс предикатов и $m$-местные предикаты $\rho_1, \rho_2 \in S$ , то $S \cup \{\rho_1 \cap \rho_2\}$ также эффективно разрешим.

**Доказательство.** Рассмотрим $FTS\,(H)$, где $H = (A, \rho_1 \cap \rho_2, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $P_i^{m_i} \in S$. Пусть вход содержит модель $I = (B, Q, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$. Тогда $Hom\,(I, H) = Hom\,(I', H')$, где $H' = (A, \rho_1, \rho_2, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $I' = (B, Q, Q, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$. Следовательно, если полиномиально разрешима $FTS\,(H')$, то полиномиально разрешима и $FTS\,(H)$.

**Определение 6.** Класс предикатов $S = \{\rho_\alpha^{n_\alpha} \subseteq A^{n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ для которого справедливы свойства

А) $diag\,(A) \in S$

Б) если $\rho \in S$, то $\rho^\sigma \in S$

В) если $\rho \in S$, то $\rho \times A \in S$

Г) если $\rho \in S$, то $\{(x_1, ..., x_{m-1}) \,|\, (x_1, ..., x_m) \in \rho\} \in S$

Д) если одинаковой арности $\rho_1, \rho_2 \in S$, то $\rho_1 \cap \rho_2 \in S$

называется замкнутым классом предикатов.

**Определение 7.** Минимальный по включению замкнутый класс предикатов, содержащий $S$, называется замыканием $S$ и обозначается $S^{\triangleright}$.

Очевидно, замыкание может быть получено посредством итеративного добавления к $S$ диагонали и, для каждых $\rho_1, \rho_2 \in S$, добавления $\rho_1^\sigma$, $\rho_1 \times A$, $\{(x_1, ..., x_{m-1}) \,|\, (x_1, ..., x_m) \in \rho_1\}$, $\rho_1 \cap \rho_2$ и т.д. Из доказанных предложений очевидны следующие теоремы.

**Теорема 2.** Если класс предикатов $S$ является эффективно разрешимым, то $S^{\triangleright}$ также эффективно разрешим.

**Теорема 3.** Всякий максимальный класс предикатов $S$ является замкнутым.

**Определение 8.** Пусть $\rho \subseteq A^m$ и $f : A^n \to A$. Функция $f$ сохраняет предикат $\rho$, если для любых $(x_1^i, ..., x_m^i) \in \rho, i = \overline{1, n}$ справедливо $(f\,(x_1^1, ..., x_1^n)\,, ..., f\,(x_m^1, ..., x_m^n)) \in \rho$.

Для множества предикатов $P$ обозначим $Pol\,(P)$ множество функций сохраняющих все предикаты из $P$. Заметим, что этот класс функций является замкнутым относительно замен переменных(с добавлением фиктивных) и суперпозиций, а также содержит все селекторные функции, то есть функции вида $s_n^i(x_1, ..., x_n) = x_i$. Для множества функций $F$ обозначим $Inv\,(F)$ множество предикатов сохраняющихся для любой функции из $F$. Этот класс предикатов, очевидно, является замкнутым. Отсюда получаем определение замыкания Галуа $P^*$ множества предикатов $P$ : $P^* = Inv\,(Pol\,(P))$. Справедлива следующая известная теорема[18, 1], которую мы приведем без доказательства.

**Теорема 4.** Если $P$ — замкнутый класс предикатов, то $P = P^*$.

Из последней теоремы следует, что

**Теорема 5.** Всякий максимальный класс предикатов $S$ определяется некоторым классом функций $F$, что $S = Inv\,(F)$.

**Доказательство.** В качестве $F$ можно взять любой базис множества $Pol\,(S)$.

Уточним вид функций, которые могут определять максимальные классы предикатов.

**Предложение 6.** Если задан $S = \{\rho_\alpha^{n_\alpha} \subseteq A^{n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — эффективно разрешимый класс предикатов, то $S \cup \{C\}$, где $C \subseteq A$, также эффективно разрешим.

**Доказательство.** Рассмотрим $FTS\,(H)$, где $H = (A, C, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $P_i^{m_i} \in S$. Пусть вход содержит модель $I = (B, Q, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$ и выборку $\Pi = \{(x_i, y_i, w_i)\,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^n$. Положим $H' = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$ и $I' = I = (B, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$. Пусть $\Pi' = \{(x_i, y_i, w_i)\,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^n \cup \{(x, y, W)\,|x \in Q, y \in C\}$, где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i + 1$. Рассмотрим

$$f = \operatorname*{arg\,max}_{g \in Hom(I', H')} \sum_j w_j\,[g\,(x_j) = y_j] + \sum_{x \in Q, y \in C} W\,[g\,(x) = y].$$

Максимальное удовлетворение прецедентам из $\{(x, y, W)\,|x \in Q, y \in C\}$ равносильно тому, что $f\,(Q) \subseteq C$, то есть $f \in Hom\,(I, H)$. Так как вес любого прецедента $(x, y, W)$ больше чем вес всех прецедентов из $\Pi$, то при $Hom\,(I, H) \neq \emptyset$, всегда выгодно сначала максимально удовлетворить прецедентам $(x, y, W)$, и лишь потом оптимизировать для прецедентов из $\Pi$. Тогда вес второго слагаемого будет $W\,|Q|$. Отсюда следует, что $f = \operatorname*{arg\,max}\limits_{g \in Hom(I,H)} \sum\limits_j w_j\,[g\,(x_j) = y_j]$. Если же $Hom\,(I, H) = \emptyset$, то $\max\limits_{g \in Hom(I', H')} \sum\limits_j w_j\,[g\,(x_j) = y_j] + \sum\limits_{x \in Q, y \in C} W\,[g\,(x) = y] < W\,|Q|$, что легко проверяется.

Следовательно, если полиномиально разрешима $FTS\,(H')$, то полиномиально разрешима и $FTS\,(H)$.

**Теорема 6.** Пусть максимальный класс предикатов $S = \{\rho_\alpha^{n_\alpha} \subseteq A^{n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ определяется некоторым классом функций $F$, то есть $S = Inv\,(F)$. Тогда для любого $f \in F, f : A^n \to A$, справедливо, что $f\,(x_1, ..., x_n) \in \{x_1, ..., x_n\}$, то есть $f$ консервативна.

**Доказательство.** Пусть $C = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq A$. В силу предыдущей теоремы $C \in S$, и сохранение функцией $f$ предиката $C$ предполагает $f\,(x_1, ..., x_n) \in \{x_1, ..., x_n\}$.

Итак, было установлено, что всякому максимальному классу предикатов соответствует замкнутый относительно замен переменных и суперпозиций класс консервативных функций, содержащий все селекторные. Постом[26] было дано полное описание решетки замкнутых классов булевых функций, что позволяет нам дать полное описание максимальных классов предикатов в этом случае.

## 1.3 Максимальные классы предикатов в булевом случае

В случае $A = \{0, 1\}$ существует счетное число замкнутых классов булевых функций с консервативными функциями и содержащих все селекторные. Следуя таблице замкнутых классов на странице 76 книги[5] приведем их. В следующей таблице даны их обозначения и соответствующие предикаты, которые задают данные классы. Замыкание данных предикатов суть множество предикатов сохраняющихся для всех функций соответствующего класса.

| | |
|---|---|
| $T_{01}$ | $x = 0, x = 1$ |
| $M_{01}$ | $x = 0, x = 1, x_1 \leq x_2$ |
| $S_{01}$ | $x = 0, x_1 \neq x_2$ |
| $SM$ | $x_1 \neq x_2, x_1 \leq x_2$ |
| $L_{01}$ | $x = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0$ |
| $U_{01}$ | $x = 0, x = 1, x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3$ |
| $K_{01}$ | $x = 0, x = 1, x_1 = x_2 x_3$ |
| $D_{01}$ | $x = 0, x = 1, x_1 = x_2 \vee x_3$ |
| $I_1^m$ | $x = 1, x_1 x_2 ... x_m = 0$ |
| $MI_1^m$ | $x = 1, x_1 \leq x_2, x_1 x_2 ... x_m = 0$ |
| $O_0^m$ | $x = 0, x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_m = 1$ |
| $MO_0^m$ | $x = 0, x_1 \leq x_2, x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_m = 1$ |

**Теорема 7.** Классы предикатов $Inv\,(T_{01})\,, Inv\,(M_{01})\,, Inv\,(S_{01})$ и только они, максимальны в булевом случае.

**Доказательство.** Эффективная разрешимость класса $Inv\,(T_{01})$ очевидна. Докажем эффективную разрешимость класса $Inv\,(M_{01})$. По теореме 7, это равносильно полиномиальной разрешимости задачи $FTS\,(H = (A, \{0\}\,, \{1\}\,, \{(x_1, x_2)\,|x_1 \leq x_2\}))$, так как соответствующий класс получается замыканием данной системы предикатов.

Пусть на входе у задачи модель $I = (B, Q_0, Q_1, Q)$ и $\Pi = \{(x_i, y_i, w_i)\,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^{n}$. Пусть $Q^*$ — рефлексивное и транзитивное замыкание $Q$ (взять такое замыкание можно за $O\left(|B|^3\right)$ шагов). Заметим, что замена $Q$ на $Q^*$ в $I$ не изменит $Hom\left(I,H\right)$. Следовательно, можно полагать, что $Q$ — частичный предпорядок(транзитивное и рефлексивное отношение). Пусть $M_0=\left\{x|\exists yQ\left(x,y\right)\&Q_0\left(y\right)\right\}, M_1=\left\{x|\exists yQ\left(y,x\right)\&Q_1\left(y\right)\right\}$. Ясно, что для любого $f\in Hom\left(I,H\right)$, справедливо $f\left(M_0\right)=0, f\left(M_1\right)=1$. Если, $M_0\cap M_1\neq\emptyset$, то $Hom\left(I,H\right)=\emptyset$ и ответ на задачу отрицательный.

Положим $I'=\left(B\backslash\left(M_0\cup M_1\right),\emptyset,\emptyset,Q\right)$. Очевидно, что $Hom\left(I,H\right)\cong Hom\left(I',H\right)$, по правилу $f\in Hom\left(I,H\right)\leftrightarrow f|_{B\backslash\left(M_0\cup M_1\right)}\in Hom\left(I',H\right)$. Будем полагать $f, f|_{B\backslash\left(M_0\cup M_1\right)}$ эквивалентными. Пусть $\Pi'=\left\{\left(x,\arg\max\limits_{y\in\{0,1\}}\sum\limits_{x_i=x,y_i=y}w_i,\max\limits_{y\in\{0,1\}}\sum\limits_{x_i=x,y_i=y}w_i-\min\limits_{y\in\{0,1\}}\sum\limits_{x_i=x,y_i=y}w_i\right)|x\in B\backslash\left(M_0\cup M_1\right)\right\}$. Подадим на вход $FTS\left(H\right)$ пару $I',\Pi'$. Легко видеть, что

$$\arg\max_{f\in Hom(I',H)}\sum_{x\in B\backslash(M_0\cup M_1)}\left(\max_{y\in\{0,1\}}\sum_{x_i=x,y_i=y}w_i-\min_{y\in\{0,1\}}\sum_{x_i=x,y_i=y}w_i\right)\left[f\left(x\right)=\arg\max_{y\in\{0,1\}}\sum_{x_i=x,y_i=y}w_i\right]=\arg\max_{f\in Hom(I,H)}\sum_j w_j\left[f\left(x_j\right)=y_j\right]$$

Следовательно, ответ на $I',\Pi'$ совпадает с ответом на $I,\Pi$. Покажем, что ответ на $I',\Pi'$ может быть получен за полиномиальное число шагов. Легко видеть, что новые прецеденты, с точностью до бесполезных троек вида $\left(x,y,0\right)$ , можно представить в виде $\Pi'=\left\{\left(x'_i,y'_i,w'_i\right)|x'_i\in B,y'_i\in A,w'_i\in\mathrm{N}\right\}_{i=1}^s$, где $x'_i=x'_j\Leftrightarrow i=j$.

Образуем граф $G=\left(V,E\right)$, $V=\left\{x'_i\right\}_{i=1}^s$ и $E=\left\{\left(x'_i,x'_j\right)|Q\left(x'_i,x'_j\right)\&\left(y'_i\not\leq y'_j\right)\right\}_{i=1}^s$, и каждой вершине $x'_i$ дадим вес $w'_i$. Так как он двудольный, то найдем максимальное по весу независимое множество $IS$ в графе. И $f\left(x\right)=\max\limits_{Q\left(x'_i,x\right),x'_i\in IS}y'_i$ будет ответом алгоритма. Действительно, ясно, что

$$\max_{g\in Hom(I',H)}\sum_{i=1}^s w'_i\left[g\left(x'_i\right)=y'_i\right]\leq\left|IS\right|,$$

так как для любого $g\in Hom\left(I',H\right)$, множество $\left\{x'_i|g\left(x'_i\right)=y'_i\right\}$ является независимым в графе $G$ . Легко видеть, что равенство достигается на функции $f$, так как для любого $x'_i\in IS\rightarrow f\left(x'_i\right)=y'_i$. Построение множеств $M_0,M_1$ выполняется за $O\left(\left|B\right|^2\right)$ шагов и максимальное по весу независимое множество $IS$ в двудольном графе находится за $O\left(\left|B\right|^3\log\sum\limits_{i=1}^n w_i\right)$ шагов. Итак, ответ на $I',\Pi'$ может быть получен за полиномиальное от длины входа число шагов, а следовательно $Inv\left(M_{01}\right)$ эффективно разрешимо.

Докажем теперь эффективную разрешимость $Inv\,(S_{01})$, то есть полиномиальную разрешимость $FTS\,(H = (A, \{0\}, \{(x_1, x_2)\,|x_1 \neq x_2\}))$.

Пусть на входе у задачи модель $I = (B, Q_0, Q)$ и $\Pi = \{(x_i, y_i, w_i)\,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^{n}$.

Легко видеть, что бинарное отношение $Q$, рассматриваемое как граф, может быть разложено на связные компоненты $(B, Q) = K_1 \cup \ldots \cup K_t$, где $K_i = (V_i, E_i)$. На выполнение этого разложения уйдет $O\left(|B|^2\right)$ шагов. Если среди компонент есть граф с циклом в нечетное число вершин, то, очевидно, $Hom\,(I, H) = \emptyset$. Иначе, задача оптимизации сводится к подзадачам для каждой компоненты в отдельности:

$$\max_{f \in Hom(I,H)} \sum_{i=1}^{n} w_i\,[f\,(x_i) = y_i] = \sum_{i=1}^{t} \max_{f \in Hom(I_i,H)} \sum_{x_j \in V_i} w_j\,[f\,(x_j) = y_j],$$

где $I_i = (V_i, Q_0 \cap V_i, E_i)$. Но, $|Hom\,(I_i, H)| \leq 2$, и простой перебор решает каждую подзадачу. Итак, $Inv\,(S_{01})$ эффективно разрешимо.

Покажем теперь, что остальные классы не являются эффективно разрешимыми. Сделаем мы это доказав их NP-трудность.

Очевидно, что $\{(x_1, x_2)\,|x_1 \vee x_2\} \in Inv\,(SM)$, $Inv\,(U_{01})$, $Inv\,(D_{01})$, $Inv\,(O_0^m)$, $Inv\,(MO_0^m)$ и $\{(x_1, x_2)\,|\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\} \in Inv\,(K_{01})$, $Inv\,(I_1^m)$, $Inv\,(MI_1^m)$, так как:

$$\begin{aligned}
&x_1 \vee x_2 = \exists x_3\,[x_1 \neq x_3]\,\&\,[x_3 \leq x_2]\\
&x_1 \vee x_2 = \exists x_3\,[x_3 = 1]\,\&\,[x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2]\\
&\overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \exists x_3\,[x_3 = 0]\,\&\,[x_3 = x_1 x_2]\\
&x_1 \vee x_2 = \exists x_3\,[x_3 = 1]\,\&\,[x_3 = x_1 \vee x_2]\\
&\overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \exists x_3 \ldots x_m\,[x_1 x_2 \ldots x_m = 0]\,\&\,[x_2 = x_3]\,\&\ldots\&\,[x_{m-1} = x_m]\\
&x_1 \vee x_2 = \exists x_3 \ldots x_m\,[x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_m = 1]\,\&\,[x_2 = x_3]\,\&\ldots\&\,[x_{m-1} = x_m]
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $FTS\,(H = (A, \{(x_1, x_2)\,|x_1 \vee x_2\}))$ и $FTS\,(H = (A, \{(x_1, x_2)\,|\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\}))$ являются NP-трудными, то $Inv\,(SM)$, $Inv\,(U_{01})$, $Inv\,(D_{01})$, $Inv\,(O_0^m)$, $Inv\,(MO_0^m)$, $Inv\,(K_{01})$, $Inv\,(I_1^m)$, $Inv\,(MI_1^m)$ не могут быть эффективно разрешимыми.

Докажем NP-трудность $FTS\,(H = (A, \{(x_1, x_2)\,|x_1 \vee x_2\}))$ ($FTS\,(H = (A, \{(x_1, x_2)\,|\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\}))$ — аналогично).

Подадим на вход $FTS\,(H = (A, \{(x_1, x_2)\,|x_1 \vee x_2\}))$ модель $I = (V, E)$ и множество прецедентов $\Pi = \{(x, 0, 1)\,|x \in V\}$. Очевидно, что $\{\{x | f(x) = 0\}\,|f \in Hom\,(I, H)\}$ — это независимые множества графа $(V, E)$ и задача равносильна нахождению максимального независимого множества в этом графе. Она NP-трудна, а следовательно, NP-трудна и $FTS\,(H = (A, \{(x_1, x_2)\,|x_1 \vee x_2\}))$.

Осталось доказать NP-трудность $Inv(L_{01})$. Докажем, что пользуясь решателем $FTS(H = (A, \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 1\}))$ в качестве оракула, можно решить Max-CUT за полиномиальное число шагов. Здесь подразумевается сложение по модулю 2.

Напомним формулировку Max-CUT. Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель. И требуется найти разбиение вершин на 2 класса(разрез) с максимальным числом ребер между ними. Введем переменные $x_{ij}, y_i, y_j, i, j \in V$. Подадим на вход $FTS(H)$ модель $I = (\{x_{ij}, y_i, y_j, i, j \in V\}, \{(x_{ij}, y_i, y_j) | i, j \in V\})$ и множество прецедентов $\Pi = \{(x_{ij}, 0, 1) | ij \in E\}$. Тогда всякий элемент $Hom(I, H)$ есть решение системы уравнений $x_{ij}+y_i+y_j = 1, i, j \in V$. То есть, $x_{ij} = y_i+y_j+1, i, j \in V$, для произвольного булева вектора $\overline{y} = \left(y_1, ..., y_{|V|}\right)$, является решением. Вектор $\overline{y}$ можно рассматривать как разрез $\{i | y_i = 1\} \subseteq V$ и значение оптимизируемого функционала есть удвоенный вес этого разреза. Итак, решив $FTS(H)$, мы получаем решение для Max-CUT. Теорема доказана.

## 1.4 Эффективная разрешимость порядкового класса предикатов в общем случае

Как известно, в небулевом случае замкнутых классов функций континуальное множество. Потому, подход основанный на рассмотрении каждого замкнутого класса в отдельности неприменим. Для нас представляет интерес описать через отношение сохранения функцией предиката как можно более широкие эффективно разрешимые классы предикатов.

Пусть на $A = \{0, 1, ..., k-1\}$ задан полный порядок $\leq$. Для простоты будем полагать, что $0 \leq 1 \leq ... \leq k-1$. Положим для $x, y \in A$, $x \wedge y = \min\{x, y\}, x \vee y = \max\{x, y\}$, и введем класс предикатов $Inv(\{x \wedge y, x \vee y\})$. Этот класс является обобщением булевого $Inv(M_{01})$.

**Теорема 8.** Класс $Inv(\{x \wedge y, x \vee y\})$ — эффективно разрешимый класс предикатов.

**Доказательство.** Для произвольного предиката $\rho \subseteq A^n$ и $M \subseteq [n] = \{1, 2, ..., n\}$, введем обозначение $\mathrm{Pr}_M \rho$ — проекция предиката $\rho$ на компоненты из множества $M$. В зависимости от контекста иногда будем считать $\mathrm{Pr}_M \rho$ предикатом арности $n$(добавив фиктивные компонентs из $\overline{M}$).

**Лемма 1.** Если замкнутый класс предикатов $S$ сохраняет функцию $\mu : A^3 \to A$, такую, что $\mu(x, x, y) = \mu(x, y, x) = \mu(y, x, x) = x$, то $S = S_2^{\triangleright}$, где $S_2 = \{\rho | \rho \subseteq A^2\} \cap S$.

**Доказательство леммы.** Пусть задан $n$-местный предикат $\rho \in S$. Докажем, что для $n \geq 2$, имеет место $\rho = \bigcap\limits_{i,j} \rho_{i,j}$, где $\rho_{i,j} = \mathrm{Pr}_{i,j} \rho \in S_2^{\triangleright}$. Докажем индукцией по $n$. Для $n = 2$ — очевидно. Пусть справедливо для $n \leq k$.

Рассмотрим $k+1$-местный предикат $\rho \in S$. Так как $k+1 \geq 3$, то рассмотрим предикаты $\rho_1 = \mathrm{Pr}_{[k+1]\setminus\{1\}}\,\rho$, $\rho_2 = \mathrm{Pr}_{[k+1]\setminus\{2\}}\,\rho$, $\rho_3 = \mathrm{Pr}_{[k+1]\setminus\{3\}}\,\rho$. Так как эти предикаты от одной из компонент зависят фиктивно и $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in S$, то по предположению индукции, $\rho_1 = \bigcap\limits_{i,j\neq 1} \rho_{i,j}$, $\rho_2 = \bigcap\limits_{i,j\neq 2} \rho_{i,j}$, $\rho_3 = \bigcap\limits_{i,j\neq 3} \rho_{i,j}$. Если $\rho = \rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3$, то $\rho = \bigcap\limits_{i,j} \rho_{i,j}$ и утверждение доказано. Действительно, $\rho \subseteq \rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3$. И наоборот, если $\left(x_1, x_2, x_3, \overline{\xi}\right) \in \rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3$, то существуют $\left(y_1, x_2, x_3, \overline{\xi}\right), \left(x_1, y_2, x_3, \overline{\xi}\right), \left(x_1, x_2, y_3, \overline{\xi}\right) \in \rho$, и тогда, $\left(x_1, x_2, x_3, \overline{\xi}\right) = \left(\mu\left(y_1, x_1, x_1\right), \mu\left(x_2, y_2, x_2\right), \mu\left(x_3, x_3, y_3\right), \mu\left(\overline{\xi}, \overline{\xi}, \overline{\xi}\right)\right) \in \rho$. То есть $\rho_1 \cap \rho_2 \cap \rho_3 \subseteq \rho$. Следовательно, $\rho = \bigcap\limits_{i,j} \rho_{i,j} \in S_2^{\triangleright}$. Лемма доказана.

Легко видеть, что $\mu(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$ получается из $x \wedge y, x \vee y$ операциями суперпозиции и замены переменных, следовательно, предикаты из $Inv\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$ сохраняются при функции $\mu$, причем она обладает свойствами $\mu(x,x,y) = \mu(x,y,x) = \mu(y,x,x) = x$. Отсюда ясно, что $Inv\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$ может быть получен замыканием лишь бинарных предикатов класса $Inv\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$, которые обозначаются $Inv_2\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$. Следовательно, по теореме 7, если мы докажем, что $Inv_2\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$ — эффективно разрешимый класс предикатов, то мы докажем, что таким является и $Inv\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$.

**Лемма 2.** Всякий предикат из $Inv_2\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$ может быть получен пересечением бинарных предикатов вида $p^l_{a,b} = \{(x,y) \mid [x \geq a] \vee [y \leq b]\}$ и $p^r_{a,b} = \{(x,y) \mid [x \leq a] \vee [y \geq b]\}$, $a, b = \overline{0, k+1}$, и $X \times Y$, где $X \subseteq A, Y \subseteq A$.

**Доказательство леммы.** Рассмотрим $\rho \in Inv_2\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$.

Докажем, что

$$\rho = \bigcap_{\rho \subseteq p^r_{x,y}} p^r_{x,y} \bigcap_{\rho \subseteq p^l_{x,y}} p^l_{x,y} \bigcap_{\rho \subseteq X \times Y} X \times Y.$$

Вложимость $\rho$ в пересечение очевидна.

Обратно, пусть $(a,b) \notin \rho$. Докажем, что эта пара не содержится в пересечении $\bigcap\limits_{\rho \subseteq p^r_{x,y}} p^r_{x,y} \bigcap\limits_{\rho \subseteq p^l_{x,y}} p^l_{x,y} \bigcap\limits_{\rho \subseteq X \times Y} X \times Y$.

Допустим найдутся такие $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \rho$, что $x_1 \leq x_2, y_1 \geq y_2, \rho \subseteq p^l_{x_1,y_1}, \rho \subseteq p^r_{x_2,y_2}$ и $a \in [x_1, x_2], b \in [y_2, y_1]$. Пусть $I_x = [x_1, x_2] \cap \mathrm{Pr}_x\,\rho$ и $I_y = [y_2, y_1] \cap \mathrm{Pr}_y\,\rho$. Тогда $I_x \times I_y \subseteq \rho$. Действительно, если $(w, e'), (w', e) \in \rho$ и $w \in [x_1, x_2], e \in [y_2, y_1]$, то $(w, e') \wedge (x_2, y_2) = (w, e' \wedge y_2) \in \rho$, $(w', e) \wedge (x_1, y_1) = (w' \wedge x_1, e) \in \rho$ и $(w, e' \wedge y_2) \vee (w' \wedge x_1, e) = (w, e) \in \rho$.

Отсюда следует, что $I_x \times I_y \subseteq \rho \subseteq \left(I_x \cup \overline{[x_1, x_2]}\right) \times \left(I_y \cup \overline{[y_2, y_1]}\right)$. Ясно, что из $I_x \times I_y \subseteq \rho$ следует, что либо $a \notin I_x$, либо $b \notin I_y$ . То есть $(a,b) \notin \left(I_x \cup \overline{[x_1, x_2]}\right) \times \left(I_y \cup \overline{[y_2, y_1]}\right)$, откуда следует, что $(a,b)$ не войдет в пересечение.

Допустим теперь, что пар $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ не найдется. Это равносильно тому, что либо $\{(r,s) \,|\, (r,s) \in \rho, r \le a, s \ge b\} = \emptyset$, либо $\{(r,s) \,|\, (r,s) \in \rho, r \ge a, s \le b\} = \emptyset$. Для определенности положим $\{(r,s) \,|\, (r,s) \in \rho, r \le a, s \ge b\} = \emptyset$. Тогда $\rho \subseteq p^l_{a+1,b-1}$ и $(a,b) \notin p^l_{a+1,b-1}$ не войдет в пересечение. Лемма доказана.

Итак, осталось лишь доказать полиномиальную разрешимость $FTS\left(H = \left(A, p^r_{0,0}, ..., p^r_{k+1,k+1}, p^l_{0,0}, ..., p^l_{k+1,k+1}\right)\right)$, откуда будет следовать эффективная разрешимость $Inv_2\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$ и, следовательно, $Inv\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$.

**Определение 9.** Пусть $\mathfrak{L} = (L, \cup, \cap)$ — подалгебра алгебры подмножеств $\left(2^{[n]}, \cup, \cap\right)$, или, иначе говоря, конечная дистрибутивная решетка с основанием $n$. Функция $\varphi : \mathfrak{L} \to Z$ называется супермодулярной на $\mathfrak{L}$ , если $\varphi(x \cap y) + \varphi(x \cup y) \ge \varphi(x) + \varphi(y)$.

В работе[21] был получен полиномиальный $O\left(n^5 \log M\right)$-алгоритм максимизации супермодулярной функции $\varphi$, заданной вычисляющим оракулом, на дистрибутивной решетке, где $M = \max\limits_x |\varphi(x)|$.

Заметим, что $p^{r,l}_{a,b}(x,y) = \left[(x,y) \in p^{r,l}_{a,b}\right]$ и $\delta_s(x) = [x = s]$ являются супермодулярными на дистрибутивной решетке $\mathfrak{L} = (A, \vee, \wedge)$.

Отсюда следует, что задача максимизации всякой функции вида $\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{a,b,i,j} w^r_{a,b,i,j} p^r_{a,b}(x_i, x_j) + \sum\limits_{a,b,i,j} w^l_{a,b,i,j} p^l_{a,b}(x_i, x_j) + \sum\limits_{s,i} w^i_s \delta_s(x_i)$, $w^r_{a,b,i,j}, w^l_{a,b,i,j}, w^i_s \in Z^+$, осуществляется за $O\left(n^5 \log M\right)$ шагов, где $M = \sum\limits_{a,b,i,j} w^r_{a,b,i,j} + \sum\limits_{a,b,i,j} w^l_{a,b,i,j} + \sum\limits_{s,i} w^i_s$. Используя этот факт, докажем, что $FTS\left(H = \left(A, p^r_{0,0}, ..., p^r_{k+1,k+1}, p^l_{0,0}, ..., p^l_{k+1,k+1}\right)\right)$ полиномиально разрешима.

Пусть на вход к задаче подается модель $I = \left(B, Q^r_{0,0}, ..., Q^r_{k+1,k+1}, Q^l_{0,0}, ..., Q^l_{k+1,k+1}\right)$ и выборка $\Pi = \{(x_i, y_i, w_i) \,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^n$. Пусть $W = \sum\limits_{i=1}^n w_i + 1$. Рассмотрим функцию $f : B \to A$ как совокупность переменных $f_1, ..., f_{|B|} \in A$. Тогда, если $Hom(I, H) \neq \emptyset$,

$$R = \sum_{a,b} W\left|Q^r_{a,b}\right| + \sum_{a,b} W\left|Q^l_{a,b}\right| + \max_{f \in Hom(I,H)} \sum_{i=1}^n w_i\left[f(x_i) = y_i\right] =$$
$$= \max_{f_1,...,f_{|B|}} W \sum_{a,b} \sum_{(x,y) \in Q^r_{a,b}} p^r_{a,b}(f_x, f_y) + W \sum_{a,b} \sum_{(x,y) \in Q^l_{a,b}} p^l_{a,b}(f_x, f_y) + \sum_{i=1}^l w_i \delta_{y_i}(f_{x_i}) \ge .$$
$$\ge \sum_{a,b} W\left|Q^r_{a,b}\right| + \sum_{a,b} W\left|Q^l_{a,b}\right|$$

Если же $R < \sum\limits_{a,b} W\left|Q^r_{a,b}\right| + \sum\limits_{a,b} W\left|Q^l_{a,b}\right|$, то $Hom(I, H) = \emptyset$. Эта задача решается за $O\left(|B|^5 \log M\right)$ шагов, где $M = 2W(k+2)^2 B^2 + W$. Отсюда следует, что $FTS\left(H=\left(A,p^r_{0,0},...,p^r_{k+1,k+1},p^l_{0,0},...,p^l_{k+1,k+1}\right)\right)$ полиномиально разрешима. Теорема доказана.

**Следствие.** Для предиката полного порядка $x \geq^A y \Leftrightarrow x = x \vee y$ справедливо, что $FTS\left(H=\left(A,\geq^A\right)\right)$ — полиномиально разрешимая задача.

**Доказательство.** Предикат полного порядка $x \geq^A y \Leftrightarrow x = x \vee y$ сохраняется относительно функций $x \wedge y, x \vee y$.

## 1.5 Открытые вопросы

В главе поставлена задача полного описания максимальных классов предикатов в общем случае. Данная задача, помимо приложений в распознавании образов, представляет и общематематический интерес. Исследование в данном направлении навеяно алгебраическим подходом к классификации эффективно разрешимых подзадач задачи «Обобщенная выполнимость»(Constraint Satisfaction Problem)[22, 23, 24, 13]. В рамках последнего направления были описаны предикатные классы, которым соответствует эффективно разрешимые подзадачи CSP.

Дальнейшее развитие этого исследования будет связано с описанием новых эффективно разрешимых классов предикатов. Одной из задач стоящих в этом русле является выделение эффективно разрешимого подкласса из класса предикатов сохраняющих некоторую мальцевскую операцию, то есть тернарную операцию со свойством $f(x,x,y) = f(y,x,x) = y$. Из результатов[14] следует, что в данном случае можно эффективно построить функцию(или проверить ее несуществование), строго удовлетворяющую ограничениям обучающей выборки. Представляется, что этот разрешимый подкласс будет обобщением класса $Inv\left(S_{01}\right)$ булева случая.

Так же интерес представляет вопрос о существовании тернарных предикатов не сводящихся к бинарным(то есть не получающихся из них операциями замыкания) и порождающих эффективно разрешимые классы предикатов.

# Глава 2

# Задача монотонизации выборки

## 2.1 Постановка задачи монотонизации выборки

Одним из популярных типов дополнительных ограничений являются ограничения монотонности[27]. В предыдущей главе было показано, что для произвольного полного порядка $\geq^A$ на $A$, $FTS\left(H = \left(A, \geq^A\right)\right)$ — полиномиально разрешимая задача.

Более реалистична несколько иная постановка задачи согласования с обучающей выборкой, когда $\geq^A$ — некоторый частичный порядок, входная модель множества определения $\left(B, \geq^B\right)$ фиксирована и не обязательно конечна, а в прецедентном множестве не могут встретится сразу 2 прецедента типа $(x, y_1, w_1), (x, y_2, w_2)$, где $y_1 \neq y_2$.

Для этой модели уместно задачу согласования с обучающей выборкой назвать задачей минимальной коррекции прецедентных данных. Рассмотрим ее в других обозначениях.

Пусть заданы множества $X, Y$ и на них частичные порядки $\geq^X, \geq^Y$ соответственно. Предположим также, что частичный порядок $\geq^Y$ является полурешеткой(то есть с наличием лишь операции верхней грани). При заданном отображении $o : X' \to Y$, где $X' \subseteq X, |X'| < \infty$, возникает задача нахождения функции $f : X \to Y$, монотонной относительно частичных порядков $\geq^X, \geq^Y$ и минимизирующей функционал согласованности: $Er_o(f) = |\{x | f(x) \neq o(x)\} \cap X'|$.

Обозначим $M\left(\geq^X, \geq^Y\right)$ множество монотонных функций из $X$ в $Y$. Тогда, при заданном отображении $o : X' \to Y$, задача заключается в следующем:

$$Er_o(f) \to \min_{f \in M(\geq^X, \geq^Y)}$$

Всякое монотонное на подмножестве $X' \subseteq X$ отображение $f' : X' \to Y$ может быть продолжено до монотонного на всем $X$, так как множество $\left(Y, \geq^Y\right)$

есть полурешетка. Действительно, на полурешетке $\left(Y, \geq^{Y}\right)$ у всякого конечного подмножества существует sup и функция $f(x)=\sup \left\{f'(x') \mid x' \in X', x' \leq^{X} x\right\}$ обладает свойством монотонности и $f(x)=f'(x), x \in X'$. Отсюда следует, что в поставленной задаче можно всегда полагать $X'=X$. Из сказанного также следует, что эта задача равносильна нахождению максимального подмножества $X'' \subseteq X'$, такого, что функция $o$, ограниченная на множество $X''$, является монотонной.

Итак, рассмотрим следующее обобщение этой задачи, которую обозначим как MaxCMS(Maximal Consistent with Monotonicity Set).

**MaxCMS.** Заданы конечные множества $B_n, B_m$, где $B_r=\{1, \ldots, r\}$ и на них частичные порядки $\geq^1, \geq^2$ соответственно и функция $\varphi: B_n \rightarrow B_m$. Для каждого элемента $i \in B_n$ задан положительный целочисленный вес $w_i$. Требуется найти максимальное по весу подмножество $B \subseteq B_n$, такое, что функция $\varphi$, ограниченная на $B$, является монотонной, то есть $\forall i, j \in B\left[i \geq^1 j \rightarrow \varphi(i) \geq^2 \varphi(j)\right]$.

**Определение 1.** Множества $B \subseteq B_n$, такие, что функция $\varphi$, ограниченная на $B$, является монотонной, называются допустимыми.

**Определение 2.** Максимальное допустимое $B \subseteq B_n$ обозначим $MaxCMS\left(\geq^1, \geq^2, \varphi, w\right)$ (в некоторых случаях так обозначается его вес).

В остальной части работы мы будем рассматривать именно эту задачу.

## 2.2 Задача монотонизации выборки и максимальные независимые подмножества

Покажем, что MaxCMS представляет собой задачу нахождения максимального независимого подмножества (либо минимального вершинного покрытия) в орграфах специального вида.

**Определение 3.** Пусть задан орграф $G=(V, E)$ и каждая вершина $v$ орграфа имеет положительный целочисленный вес $w_v$. Под независимым множеством $G$ будем понимать подмножество вершин орграфа, каждая пара элементов которого не соединена дугой. Обозначим $IS(G, w)$ наибольшее по весу независимое множество орграфа(в некоторых случаях так обозначается и сам вес).

Введем на множестве $B_n$ частичный предпорядок (напомним, что так называется транзитивный и рефлексивный бинарный предикат):

$$i \succ j \Leftrightarrow \varphi(i) \geq^2 \varphi(j).$$

Рассмотрим орграф $G=(V, E)$, где $V=B_n$, а $E=\left\{(i, j) \mid i \geq^1 j, \varphi(i) \ngeq^2 \varphi(j)\right\}$. Орграф $G$ также может быть задан равенствами:

$V = B_n$ и $E = \geq^1 \cap \overline{\succ}$, где $\overline{\succ}$ - дополнение бинарного предиката.

**Определение 4.** Всякий орграф, множество дуг которого может быть представлено как пересечение некоторых частичного порядка и дополнения частичного предпорядка на вершинах орграфа называется специальным.

**Предложение 1.** Максимальное допустимое множество равно максимальному независимому множеству специального орграфа $G$, то есть $MaxCMS\left(\geq^1, \geq^2, \varphi, w\right) = IS\left(G, w\right)$.

**Доказательство.** Всякое независимое множество $B$ орграфа $G$ обладает тем свойством, что если $i, j \in B$ и $i \geq^1 j$, то $\varphi\left(i\right) \geq^2 \varphi\left(j\right)$, то есть функция $\varphi$, ограниченная на $B$, является монотонной. Верно и обратное, если ограничение $\varphi$ на $B$ монотонно, то $B$ — независимое множество в $G$. Отсюда следует утверждение предложения.

**Предложение 2.** Пусть произвольный специальный орграф $G'$ задается множеством вершин $V' = B_n$ с весами $w'_i$ и дуг $E' = \geq' \cap \overline{\succ'}$, причем заданы по отдельности $\geq'$ и $\overline{\succ'}$ (то есть множество дуг $E'$ не нужно декомпозировать). Тогда задача нахождения максимального независимого множества в таком орграфе полиномиально сводится к MaxCMS.

**Доказательство.** Разобъем множество $V'$ на классы эквивалентности по отношению $x \sim y \Leftrightarrow x \succ y \& y \succ x$. Тогда этому разбиению естественно соответствует отображение $\varphi' : V \to V/\sim$. На фактор-множестве $V/\sim$ естественно индуцируется частичный порядок $\overline{x} \geq'' \overline{y} \Leftrightarrow x \succ y$. Как легко видеть, $IS\left(G', w'\right) = MaxCMS\left(\geq', \geq'', \varphi', w'\right)$. Сводимость осуществляется за $O\left(n^2\right)$ шагов.

## 2.3 NP-полнота MaxCMS.

В предыдущей главе было показано, что MaxCMS равносильно поиску максимального независимого множества (или минимального вершинного покрытия) в орграфах специального вида. Задачу о существовании допустимого множества мощности большей чем $C$ обозначим CMS. Очевидно, она принадлежит классу NP.

**Теорема 1.** CMS — NP-полная задача.

**Доказательство.** Сведем задачу 3-ВЫП к CMS. Используем прием примененный в [3] для сведения 3-ВЫП к Вершинному покрытию. Напомним, что вершинным покрытием называется подмножество вершин, которое для любой дуги орграфа содержит одну из ее вершин. Легко видеть, что дополнение вершинного покрытия является независимым множеством.

Пусть задана 3-КНФ и $U = \{u_1, ..., u_n\}$ — множество переменных, использованных в ней, а $C = \{c_1, ..., c_m\}$ — множество ее дизъюнктов, каждый из которых содержит ровно 3 различных по переменным литерала (литерал это $u_i$ либо

$\overline{u_i}$). Для каждого дизъюнкта упорядочим вхождения литералов в него. Тогда факт вхождения литерала $l$ в дизъюнкт $c_r$ на $s$-м месте обозначим как $lc_r^s$. Рассмотрим граф, вершинами которого являются литералы и тройные копии дизъюнктов $V = \{u_1, \overline{u_1} ..., u_n, \overline{u_n}\} \cup \{c_1^1, c_1^2, c_1^3, ..., c_m^1, c_m^2, c_m^3\}$. Определим множество дуг равным $E = E_1 \cup E_2$, где $E_1 = \{(u_i, \overline{u_i})\}_{i=1}^n \cup \left\{ \left(u_k, c_m^l\right) | u_k c_m^l \right\} \cup \left\{ \left(c_m^l, \overline{u_k}\right) | \overline{u_k} c_m^l \right\}$ и $E_2 = \left\{ \left(c_j^1, c_j^2\right), \left(c_j^2, c_j^3\right), \left(c_j^1, c_j^3\right) \right\}_{i=1}^m$ (это разбиение множества ребер на 2 подмножества понадобится нам в дальнейшем).

Вершинное покрытие орграфа $G = (V, E)$ длины $n + 2m$ существует тогда и только тогда, когда исходная 3-КНФ выполнима. Действительно, из каждой пары вершин $u_i, \overline{u_i}$ одна вершина и из каждой тройки $c_j^1, c_j^2, c_j^3$ не меньше 2 вершин должны войти в вершинное покрытие, так как они попарно соединены. Итак, мощность вершинного покрытия не меньше $n + 2m$.

Пусть такое вершинное покрытие существует. Если в него вошел литерал $u_i$, полагаем $u_i = true$, иначе $u_i = false$. Все переменные получают так свои значения, так как из вышесказанного ясно, что, либо $u_i$, либо $\overline{u_i}$ присутствуют в покрытии, причем не одновременно. Тогда этот набор, как легко видеть, и будет выполняющим для исходной 3-КНФ. Это рассуждение может быть обратимо и из существования выполняющего набора следует наличие вершинного покрытия мощности $n + 2m$.

Рассмотрим теперь граф $G' = (V, E^* \backslash E)$, где $E^*$ - транзитивное замыкание $E$. Предположим, что граф $G'$ транзитивен. Тогда, положив $\geq = E^*$ и $\succ = E^* \backslash E$, получим, что $\geq \cap \overline{\succ} = E$. Это означает, что наша задача свелась к нахождению минимального вершинного покрытия, а следовательно, максимального независимого множества для специального орграфа $G = (V, E)$, которая по предложению 2 равносильна MaxCMS, или CMS, при $C = 2n + 3m - (n + 2m) = n + m$.

Покажем, что граф $G'$ обладает свойством транзитивности. Так как $G^* = (V, E^*)$ транзитивен, транзитивности $G'$ может помешать лишь наличие $(u, v), (v, t) \in E^* \backslash E$ , что $(u, t) \in E$ . Пусть $(u, t) \in \{(u_i, \overline{u_i})\}_{i=1}^n$ . Но легко видеть, что любая цепочка в графе $G$ начинающаяся с литерала может $u_i$ не может закончиться в литерале $\overline{u_i}$, так как иначе должен существовать дизъюнкт содержащий оба литерала $u_i$ и $\overline{u_i}$. Рассмотрим теперь случай, когда $(u, t) \in \left\{ \left(c_j^1, c_j^2\right), \left(c_j^2, c_j^3\right), \left(c_j^1, c_j^3\right) \right\}$ . В этом случае цепочка начинающаяся с $c_j^\alpha$ и заканчивающаяся в $c_j^\beta$ , не может содержать элемент не принадлежащий $\left\{c_j^1, c_j^2, c_j^3\right\}$, откуда следует, что $(u, v), (v, t) \in E$, что противоречит $(u, v), (v, t) \in E^* \backslash E$. Наконец, последний случай, $(u, t) \in \left\{ \left(u_k, c_m^l\right) | u_k c_m^l \right\}$. Но, легко видеть, что любой путь в орграфе $G$, который начинается в $u$, а заканчивается в $t$, тождественен дуге $(u, t)$, что показывает, что $(u, v) \notin E^* \backslash E$. Также рассматривается и случай $(u, t) \in \left\{ \left(c_m^l, \overline{u_k}\right) | \overline{u_k} c_m^l \right\}$. Итак, граф $G'$ транзитивен и сведение 3-ВЫП к CMS осуществлено.

## 2.4 1-MaxCMS

Всякий частичный порядок на конечном множестве можно представить как пересечение полных порядков на нем.

**Определение 5.** Пусть на конечном множестве $M$ задан частичный порядок $\geq$. Размерностью частичного порядка $\geq$ назовем минимальное число $d$ полных порядков $\geq_1, ..., \geq_d$, что $\geq = \geq_1 \cap ... \cap \geq_d$ .

Рассмотрим задачу MaxCMS с входом $(\geq^1, \geq^2, \varphi, w)$ для случая, когда размерность частичного порядка $\geq^2$ равна $d$. В этом случае $\geq^2 = \geq_1 \cap ... \cap \geq_d$. Для соответствующего этой задаче специального орграфа $G = (V, E)$ будет справедливо: $V = B_n$ и $E = \geq^1 \cap \overline{\succ}$, где $i \succ j \Leftrightarrow i \succ_1 j \& ... \& i \succ_d j$ и $i \succ_s j \Leftrightarrow \varphi(i) \geq_s \varphi(j)$. И тогда,

$$E = \geq^1 \cap \overline{\succ_1 \cap ... \cap \succ_d} = \geq^1 \cap (\overline{\succ_1} \cup ... \cup \overline{\succ_d}) = \left(\geq^1 \cap \overline{\succ_1}\right) \cup ... \cup \left(\geq^1 \cap \overline{\succ_d}\right).$$

Так как каждый из предикатов $\overline{\succ_s}$ является транзитивным, то $E$ можно представить как объединение $d$ транзитивных предикатов.

**Определение 6.** Задача MaxCMS с входом $(\geq^1, \geq^2, \varphi, w)$ для случая, когда размерность частичного порядка $\geq^2$ равна $d$, называется $d$-MaxCMS.

Фактически доказано

**Предложение 3.** $d$-MaxCMS сводится к нахождению максимального независимого множества в орграфе $G = (V, E)$, где $E = \succ^1 \cup ... \cup \succ^d$, и предикаты $\succ^s$ транзитивны, причем в $G$ нет циклов.

Из предложения следует, что 1-MaxCMS сводится к нахождению максимального независимого множества в орграфе $G = (V, E)$ без циклов, удовлетворяющему условию транзитивности дуг: если $(u, v), (v, t) \in E$, то $(u, t) \in E$. Эта задача имеет полиномиальный алгоритм решения, так как граф, получаемый из орграфа $G$ преобразованием дуг в неориентированные ребра, является графом сравнимости некоторого частичного порядка, то есть совершенным. Приведем один из алгоритмов ее решения, следуя [25].

**Теорема 2.** 1-MaxCMS полиномиально разрешима.

**Доказательство.** Полагая $x \triangleright y \Leftrightarrow (x, y) \in E$, орграф можно рассматривать как частично упорядоченное множество $(V, \triangleright)$. Алгоритм заключается в сведении к задаче нахождения минимального потока в некоторой сети. Покажем как происходит сведение.

Обозначим $\min G$ и $\max G$ соответственно множество минимальных и максимальных элементов $(V, \triangleright)$. Для каждой вершины $v \in V$ графа $G$ создадим 2 копии $v^+, v^-$(для выходящих ребер и входящих ребер). Положим $V' = \{v^+, v^-\}_{v \in V} \cup \{s, t\}$ и $E' = \{(v^+, v^-)\}_{v \in V} \cup \{(x^-, y^+) \,|\, (x, y) \in E\} \cup \{(s, a^+) \,|a \in \min G\} \cup \{(b^-, t) \,|b \in \max G\}$. Получим орграф $G' = (V', E')$. Положим минимальные пропускные способности ребер $(v^+, v^-)$ равными весам соответствующих элементов $w_v$, а для остальных ребер равными 0. Максимальные пропускные способности всех дуг положим равными $\infty$.

Легко видеть, что для любой дуги $e \in E'$ в орграфе $G'$ найдется путь из $s$ в $t$ проходящий через $e$. Данное условие, очевидно, гарантирует существование допустимого конечного потока через сеть(допустимый поток определяется как поток с весами ребер, большими минимальных пропускных способностей, и равенством 0 дивергенции для каждой внутренней вершины). Следовательно для данной сети можно использовать модифицированный алгоритм Эдмондса-Карпа[17](по методу Форда-Фалкерсона), с той лишь разницей от обычного, что через ненасыщенные пути из $s$ в $t$ поток нужно уменьшать. Полученный в результате поток будет минимальным, и ему будет соответствовать разрез с максимальным $P$-весом, где под $P$-весом разреза $S, \overline{S}$ понимается(граф ориентированный и вес не сумма всех его ребер!)

$$\sum_{(u,v)\in E, u\in S, v\in \overline{S}} c_{\min}(e) - \sum_{(u,v)\in E, v\in S, u\in \overline{S}} c_{\max}(e).$$

Минимальному потоку данной сети, находимому модифицированным алгоритмом Эдмондса-Карпа(обычный находит максимальный поток), будет соответствовать $P$-максимальный разрез.

Рассмотрим произвольный разрез $V' = S \cup \overline{S}$ , где $s \in S, t \in \overline{S}$, с весом отличным от $-\infty$. Так как максимальные пропускные способности ребер равны $\infty$, то ребер $(u, v) \in E'$ вида $v \in S, u \in \overline{S}$ быть не может. Ребра же $(u, v) \in E'$ вида $u \in S, v \in \overline{S}$ только в том случае дадут вклад в вес разреза, если $u = r^+, v = r^-$. Обозначим $R = \left\{ r | r^+ \in S, r^- \in \overline{S} \right\}$. Очевидно, что элементы $R$ представляют собой независимое множество в $G$ и вес разреза будет в точности равен весу этого множества. Обратное также справедливо, любому независимому в $G$ множеству $R$ соответствует разрез $S = \{u^+, u^- | u \notin R \& \exists r \in R \, [r \triangleright u]\} \cup \{r^+ | r \in R\} \cup \{s\}$ вес которого равен весу $R$. Из этого следует, что результату этого алгоритма, то есть $P$-максимальному разрезу будет соответствовать максимальное независимое множество в $G$. Заметим, что данный алгоритм имеет сложность $O\left(|V| \left(|V| + |E|\right)^2 \log(\sum_v w_v)\right)$. Теорема доказана.

Запишем задачу нахождения минимального потока как задачу линейного программирования:

$$\begin{gathered} x(\Gamma) \geq 0, \Gamma \in \mathbb{G}(s,t) \\ \sum_{\Gamma \in \mathbb{G}(v)} x(\Gamma) \geq w_v \\ \sum_{\Gamma \in \mathbb{G}(s,t)} x(\Gamma) \to \min \end{gathered}$$

где $\mathbb{G}(s,t)$ - множество всех путей в графе $G' = (V', E')$ из $s$ в $t$, а $\mathbb{G}(v) \subset \mathbb{G}(s,t)$

— множество путей проходящих через ребро $(v^+, v^-)$. Двойственная ей:

$$\begin{gathered} y(v) \geq 0, v \in V \\ \sum_{(v^+,v^-)\in\Gamma} y(v) \leq 1, \Gamma \in \mathbb{G}(s,t) \\ \sum_{v\in V} w_v y(v) \to \max \end{gathered}$$

Из доказанного выше следует, что у двойственной задачи всегда существует целочисленное решение. Политоп двойственной задачи обозначим как $\Pi(G)$.

## 2.5 2-MaxCMS

Рассмотрим теперь задачу 2-MaxCMS. Как было показано, она сводится к задаче нахождения максимального независимого множества в орграфе $G = (V, E)$, где $E = \succ^1 \cup \succ^2$ и предикаты $\succ^s$ транзитивны, причем в $G$ нет циклов. В дальнейшем будет рассматриваться именно эта задача.

Заметим, что дуги орграфа в теореме 1 также разбиты на 2 множества $E_1$ и $E_2$, каждое из которых транзитивно. Отсюда следует, что рассматриваемая задача NP-трудна.

Рассмотрим 2 орграфа: $G_1 = (V, \succ^1)$ и $G_2 = (V, \succ^2)$. Заметим, что максимальное независимое множество орграфа $G = (V, E)$ является независимым множеством в обоих $G_1$ и $G_2$, откуда очевидна следующая теорема.

**Предложение 4.** Множество решений задачи

$$\begin{gathered} \overline{x} \in \Pi(G_1) \\ \overline{y} \in \Pi(G_2) \\ \psi(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{v\in V} w_v x_v y_v \to \max \end{gathered}$$

содержит такие вектора $\overline{x}^*, \overline{y}^*$, что $\{v | x_v^* y_v^* = 1\}$ является максимальным независимым множеством $G$.

**Доказательство.** Так как при фиксированном $\overline{x}$ максимум $\sum_{v\in V} w_v x_v y_v$ по полиэдру $\overline{y} \in \Pi(G_2)$ достигается и на некотором целочисленном векторе $\overline{y}$ (и наоборот), можно считать, что максимум функционала достигается на целочисленных векторах.

**Предложение 5.** Справедливо

$$\max_{\overline{x}\in\Pi(G_1), \overline{y}\in\Pi(G_2)} \psi(\overline{x}, \overline{y}) = \max_{\overline{x}\in\Pi(G_1), \overline{y}\in\Pi(G_2)} \gamma(\overline{x}, \overline{y}),$$

где

$$\gamma(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2} \sum_{v\in V} w_v (x_v + y_v)^2 - w_v (x_v + y_v)$$

**Доказательство.**

$$\max_{\overline{x}\in\Pi(G_1),\overline{y}\in\Pi(G_2)}\sum_{v\in V}w_v x_v y_v = \max_{\overline{x}\in\Pi(G_1),\overline{y}\in\Pi(G_2)}\frac{1}{2}\sum_{v\in V}w_v\left(x_v+y_v\right)^2 - w_v\left(x_v^2+y_v^2\right) \geq$$

$$\max_{\overline{x}\in\Pi(G_1),\overline{y}\in\Pi(G_2)}\frac{1}{2}\sum_{v\in V}w_v\left(x_v+y_v\right)^2 - w_v\left(x_v+y_v\right)$$

Однако, так как максимум левой части неравенства достигается на целочисленных векторах, ясно, что здесь необходимо равенство. Учитывая, что функционал $\gamma\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ является выпуклым, наша задача свелась к максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве.

## 2.6 Приближенный алгоритм для 2-MaxCMS

Рассмотрим функционал

$$\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{v\in V}w_v\left(x_v-y_v\right)^2 - w_v\left(x_v+y_v\right)$$

**Предложение 6.** Справедливо

$$\max_{\overline{x}\in\Pi(G_1),\overline{y}\in\Pi(G_2)}\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right) \geq \max_{\overline{x}\in\Pi(G_1),\overline{y}\in\Pi(G_2)}\psi\left(\overline{x},\overline{y}\right),$$

причем на целочисленных точках политопа $\overline{x}\in\Pi\left(G_1\right),\overline{y}\in\Pi\left(G_2\right)$ значения $\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ и $\psi\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ совпадают.

**Доказательство.** Проверка второго утверждения очевидна. Из него следует первое, в связи с тем, что максимум правой части по предложению 4 достигается и на целочисленных векторах.

Рассмотрим теперь следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{gathered}\overline{x}\in\Pi\left(G_1\right)\\ \overline{y}\in\Pi\left(G_2\right)\\ \varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\to\max\end{gathered}$$

Будем назовать ее выпуклой.

**Определение 7.** Для выпуклой задачи $\varepsilon$-решением называется пара $\overline{x}^*\in\Pi\left(G_1\right),\overline{y}^*\in\Pi\left(G_2\right)$ такая, что $\max\limits_{\overline{x}\in\Pi(G_1),\overline{y}\in\Pi(G_2)}\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)-\varphi\left(\overline{x}^*,\overline{y}^*\right)\leq\varepsilon$

**Предложение 7.** Выпуклая задача для любого $\varepsilon$ может быть $\varepsilon$-разрешена за полиномиальное от длины входа время. Под длиной входа подразумевается длина описания графов $G_1=\left(V,\succ^1\right)$ и $G_2=\left(V,\succ^2\right)$ и целочисленных весов $w_v$. Причем полученное $\varepsilon$-решение $\left(\overline{x}^*,\overline{y}^*\right)$ удовлетворяет условиям $|x_i^*-y_i^*|\leq\frac{1}{2}$.

**Лемма.** Точка $\overline{\xi^{opt}} = \left(\overline{x^{opt}}, \overline{y^{opt}}\right) = \arg \max\limits_{(\overline{x},\overline{y}) \in \Pi(G_1)\times\Pi(G_2)} \varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ удовлетворяет условию $\left|x_i^{opt} - y_i^{opt}\right| \leq \frac{1}{2}$.

**Доказательство леммы.** Квадратичный функционал $\varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ не является ограниченным в $R^{2n}$ и потому, максимум на множестве $\Pi\left(G_1\right) \times \Pi\left(G_2\right)$ достигается на границе полиэдра. Пусть $\overline{a_1}^{\mathrm{T}}\overline{\xi} \leq b_1$ , ... , $\overline{a_s}^{\mathrm{T}}\overline{\xi} \leq b_s$—те самые неравенства в определении полиэдра, которые обращаются в равенства. Из оптимальности $\left(\overline{x^{opt}}, \overline{y^{opt}}\right)$ ясно, что конус $\left\{\overline{\xi}|\overline{a_1}^{\mathrm{T}}\overline{\xi} \leq 0\right\} \cap ... \cap \left\{\overline{\xi}|\overline{a_s}^{\mathrm{T}}\overline{\xi} \leq 0\right\} \cap \left\{\overline{\xi}|\nabla_{\overline{\xi^{opt}}}\varphi\left(\overline{\xi^{opt}}\right)^{\mathrm{T}}\overline{\xi} > 0\right\} = \emptyset$. Отсюда, из теоремы Фаркаша-Минковского следует, что $\varphi\left(\overline{\xi^{opt}}\right)$ разлагается в положительную комбинацию векторов $\overline{a_1}, ..., \overline{a_s}$. Но учитывая, что компоненты этих векторов положительны, получаем, что и $\varphi\left(\overline{\xi^{opt}}\right) = \left\|x_1^{opt} - y_1^{opt} + \frac{1}{2}, y_1^{opt} - x_1^{opt} + \frac{1}{2}, ..., x_n^{opt} - y_n^{opt} + \frac{1}{2}, y_n^{opt} - x_n^{opt} + \frac{1}{2}\right\|^{\mathrm{T}} \geq \overline{0}$ . Лемма доказана.

**Доказательство предложения.** Так как функция $\varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$ является вогнутой, множество пар

$$\begin{gathered} \overline{x} \in \Pi\left(G_1\right) \\ \overline{y} \in \Pi\left(G_2\right) \\ \varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \geq c \\ -\tfrac{1}{2} \leq x_i - y_i \leq \tfrac{1}{2}, i = \overline{1, n} \end{gathered}$$

является выпуклым.

Заметим, что по заданной паре векторов $\overline{x}', \overline{y}'$, задача определения их принадлежности множеству $\Pi\left(G_1\right) \times \Pi\left(G_2\right)$ решается за полиномиальное время. Действительно, алгоритм Флойда-Уоршолла позволяет нам найти самый длинный путь из вершины $s$ в вершину $t$ орграфов $G_1$ и $G_2$, где под длиной пути подразумевается сумма весов вершин пути. И сравнение этих цифр с 1, дает нам ответ о принадлежности $\overline{x}', \overline{y}' \in \Pi\left(G_1\right) \times \Pi\left(G_2\right)$. Кроме того, если $\overline{x}', \overline{y}' \notin \Pi\left(G_1\right) \times \Pi\left(G_2\right)$, то найденный путь длины большей чем 1 и даст нам нарушенное линейное неравенство в определении политопа $\Pi\left(G_1\right) \times \Pi\left(G_2\right)$.

Наконец, при заданных $\overline{x}', \overline{y}'$, удовлетворение условия $\varphi\left(\overline{x}', \overline{y}'\right) \geq c$, а также в случае его нарушения, гиперплоскость разделяющая пару $\overline{x}', \overline{y}'$ и множество $\left\{\left(\overline{x}, \overline{y}\right)|\varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \geq c + \varepsilon\right\}$ может быть найдена за полиномиальное время.

Действительно,

$$\begin{gathered} \left\{\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \in \Pi\left(G_1\right) \times \Pi\left(G_2\right) | \left(\nabla_{\overline{x'}}\varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right), \overline{x} - \overline{x'}\right) + \left(\nabla_{\overline{y'}}\varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right), \overline{y} - \overline{y'}\right) \geq \varepsilon\right\} \supseteq \\ \supseteq \left\{\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \in \Pi\left(G_1\right) \times \Pi\left(G_2\right) | \varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \geq c + \varepsilon\right\} \end{gathered}$$

Это следует из следующих неравенств для квадратично-вогнутой функции $\varphi$ и всяких таких точек $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$, $\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right)$, что $\varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right) \geq c + \varepsilon$ и $\varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) \leq c$: $\varepsilon \leq \varphi\left(\overline{x}, \overline{y}\right) - \varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) \leq \left(\nabla_{\overline{x'}}\varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right), \overline{x} - \overline{x'}\right) + \left(\nabla_{\overline{y'}}\varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right), \overline{y} - \overline{y'}\right)$.

Тогда округляя компоненты $\nabla_{\overline{x'}}\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)$ и $\nabla_{\overline{y'}}\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)$ до $2\left(\log n+|\log\varepsilon|+1\right)$ знаков в двоичном представлении и обозначая их как $c_x$ и $c_y$, получим следующую разделяющую гиперплоскость

$$\left\{(\overline{x},\overline{y})\,|\,\left(c_x,\overline{x}-\overline{x'}\right)+\left(c_y,\overline{y}-\overline{y'}\right)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Согласно[19, 9], в этом случае пара векторов $\overline{x}',\overline{y}'$ удовлетворяющих условиям:

$$\begin{gathered}\overline{x}'\in\Pi\left(G_1\right)\\ \overline{y}'\in\Pi\left(G_2\right)\\ \varphi\left(\overline{x}',\overline{y}'\right)\geq c\\ -\tfrac{1}{2}\leq x_i'-y_i'\leq\tfrac{1}{2},i=\overline{1,n}\end{gathered}$$

может найдена за полиномиальное время методом эллипсоидов[11, 12], либо будет показано, что

$$\left\{(\overline{x},\overline{y})\,|\overline{x}\in\Pi\left(G_1\right),\overline{y}\in\Pi\left(G_2\right),\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\geq c+\varepsilon,-\frac{1}{2}\leq x_i-y_i\leq\frac{1}{2},i=\overline{1,n}\right\}=\emptyset.$$

С учетом того, что $|\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)|\leq 2\sum\limits_{v\in V}w_v$, методом половинного деления мы быстро приходим к такой константе $c$ , что множество $\Omega=\left\{(\overline{x},\overline{y})\,|\overline{x}\in\Pi\left(G_1\right),\overline{y}\in\Pi\left(G_2\right),\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\geq c,-\frac{1}{2}\leq x_i-y_i\leq\frac{1}{2},i=\overline{1,n}\right\}\neq\emptyset$ и $\left\{(\overline{x},\overline{y})\,|\overline{x}\in\Pi\left(G_1\right),\overline{y}\in\Pi\left(G_2\right),\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\geq c+\varepsilon,-\frac{1}{2}\leq x_i-y_i\leq\frac{1}{2},i=\overline{1,n}\right\}=\emptyset$. Из леммы следует, что $\overline{\xi^{opt}}\in\Omega$ и $\varphi(\overline{\xi^{opt}})<c+\varepsilon$. И любая пара из $\Omega$ дает $\varepsilon$-решение оптимизационной задачи. Предложение доказано.

Рассмотрим следующий приближенный алгоритм для 2-MaxCMS.

1. Найти пару $\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)$ такую, что $\max\limits_{(\overline{x},\overline{y})\in\Pi(G_1)\times\Pi(G_2)}\varphi\left(\overline{x},\overline{y}\right)\leq\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)+\varepsilon$ и $|x_i'-y_i'|\leq\frac{1}{2}$, где $\varepsilon=\frac{1}{16}$.

2. Найти $\overline{x}^*=\arg\max\limits_{\overline{x}\in\Pi(G_1)}\psi\left(\overline{x},\overline{y}'\right)$ и $\overline{y}^*=\arg\max\limits_{\overline{y}\in\Pi(G_2)}\psi\left(\overline{x}^*,\overline{y}\right)$. Здесь $\overline{x}^*,\overline{y}^*$ целочисленны.

Ответ алгоритма—множество вершин $\{v|x_v^*y_v^*=1\}$. Далее везде $\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)$ и $(\overline{x}^*,\overline{y}^*)$ будут обозначать пары найденные на первом и втором шагах алгоритма соответственно.

Легко видеть, что все этапы алгоритма полиномиальны. Исследуем его решение.

Введем обозначения $W=\sum\limits_{v\in V}w_v$ и $\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)=\alpha W$. Ясно, что $0\leq\alpha\leq 1$.

**Предложение 8.** Справедливо

$$\max_{(\overline{x},\overline{y})\in\Pi(G_1)\times\Pi(G_2)}\psi\left(\overline{x},\overline{y}\right)-\psi\left(\overline{x^*},\overline{y^*}\right)\leq\left(\frac{1}{4}-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right)W+\varepsilon,$$

если $\alpha \geq \frac{1}{2}$. А также

$$\max_{(\overline{x},\overline{y})\in\Pi(G_1)\times\Pi(G_2)} \psi\left(\overline{x},\overline{y}\right) - \psi\left(\overline{x^*},\overline{y^*}\right) \leq \frac{1}{4}W + \varepsilon,$$

при $\frac{3}{8} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. И

$$\max_{(\overline{x},\overline{y})\in\Pi(G_1)\times\Pi(G_2)} \psi\left(\overline{x},\overline{y}\right) - \psi\left(\overline{x^*},\overline{y^*}\right) \leq \left(\frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{3}{8}\right)^2\right) W + \varepsilon,$$

если $\alpha \leq \frac{3}{8}$.

**Доказательство.** Оценим сверху величину $\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) - \psi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)$, используя факт вогнутости функции $f(x) = x - x^2$:

$$\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) - \psi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) = \sum_{v\in V} \tfrac{1}{2}w_v\left(x'_v - {x'_v}^2\right) + \tfrac{1}{2}w_v\left(y'_v - {y'_v}^2\right) \leq \sum_{v\in V} w_v \tfrac{(x'_v+y'_v)}{2}\left(1 - \tfrac{(x'_v+y'_v)}{2}\right) = \\ = \sum_{v\in V} w_v \left(\tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{x'_v+y'_v-1}{2}\right)^2\right),$$

При $\alpha \geq \frac{1}{2}$:

$$\alpha W = \varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) = \sum_{v\in V} -\frac{1}{2}w_v\left(x'_v - y'_v\right)^2 + \frac{1}{2}w_v y'_v + \frac{1}{2}w_v x' \leq \sum_{v\in V} \frac{1}{2}w_v y'_v + \frac{1}{2}w_v x'$$

и отсюда:

$$\sum_{v\in V} w_v \frac{(x'_v + y'_v - 1)}{2} \geq \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) W.$$

Тогда

$$\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) - \psi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) \leq \sum_{v\in V} w_v \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{x'_v + y'_v - 1}{2}\right)^2\right) \leq \frac{1}{4}W - t,$$

где $t = \min\limits_{\sum\limits_{v\in V} w_v t_v \geq \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)W} \sum\limits_{v\in V} w_v t_v^2$. Легко видеть, что $t = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 W$. Итак, получаем, что

$$\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) - \psi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) \leq \left(\frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right) W.$$

Наконец, используя $\varphi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right) \geq \max\limits_{(\overline{x},\overline{y})\in\Pi(G_1)\times\Pi(G_2)} \psi\left(\overline{x},\overline{y}\right) - \varepsilon$ и $\psi\left(\overline{x^*},\overline{y^*}\right) \geq \psi\left(\overline{x'},\overline{y'}\right)$, окончательно получаем:

$$\max_{(\overline{x},\overline{y})\in\Pi(G_1)\times\Pi(G_2)} \psi\left(\overline{x},\overline{y}\right) - \psi\left(\overline{x^*},\overline{y^*}\right) \leq \left(\frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right) W + \varepsilon.$$

Почти аналогично, при $\alpha \le \frac{3}{8}$,

$$\alpha W = \varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) = \sum_{v\in V} -\frac{1}{2}w_v\left(x'_v - y'_v\right)^2 + \frac{1}{2}w_v y'_v + \frac{1}{2}w_v x' \ge \sum_{v\in V}\frac{1}{2}w_v y'_v + \frac{1}{2}w_v x' - \frac{1}{8}W$$

и отсюда:

$$\sum_{v\in V} w_v \frac{(x'_v + y'_v - 1)}{2} \le \left(\alpha - \frac{3}{8}\right)W.$$

Тогда,

$$\varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) - \psi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) \le \frac{1}{4}W - s,$$

где $s = \min\limits_{\sum\limits_{v\in V} w_v t_v \le \left(\alpha - \frac{3}{8}\right)W} \sum\limits_{v\in V} w_v t_v^2 = \left(\alpha - \frac{3}{8}\right)^2 W$. И, наконец,

$$\max_{(\overline{x},\overline{y})\in\Pi(G_1)\times\Pi(G_2)} \psi\left(\overline{x}, \overline{y}\right) - \psi\left(\overline{x^*}, \overline{y^*}\right) \le \varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) - \psi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) + \varepsilon \le \left(\frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{3}{8}\right)^2\right) W + \varepsilon.$$

Утверждение теоремы для случая $\frac{3}{8} \le \alpha \le \frac{1}{2}$ очевидно. Предложение доказано.

### 2.6.1 Обсуждение

Как было замечено выше, MaxCMS может рассматриваться как задача нахождения максимального независимого множества в специальном орграфе. Рассмотрим ее, напротив, как задачу минимального вершинного покрытия. Вспомним, что MaxCMS изначально рассматривалась как обобщение задачи поиска монотонной функции наименее отклоняющейся от данных обучающей выборки. Фактически это означает, что задача заключается в удалении «шума» в обучающей выборке для построения корректного классификатора. Очевидно, что этим самым «шумом» и является соответствующее минимальное вершинное покрытие.

Сравним теоретическую аппроксимирующую способность нашего алгоритма с основным стандартным приближенным алгоритмом для вершинного покрытия в общем случае. Как хорошо известно[20], 2-аппроксимирующий полиномиальный алгоритм для последней задачи может быть построен сведением к линейному программированию. Сведение осуществляется следующим образом: каждой вершине $v$(веса $w_v$) графа(орграфа) $G = (V, E)$ ставим в соответствие переменную $x_v$ и рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} x_i + x_j \ge 1, (i, j) \in E \\ \sum_v w_v x_v \to \min \end{gathered}$$

Тогда множество $\left\{v | x_v \geq \frac{1}{2}\right\}$ будет результирующим вершинным покрытием. Заметим, что существование приближенного алгоритма для вершинного покрытия в константой аппроксимации меньшей чем 2 является известной открытой задачей.

Ясно, что слагаемое $\varepsilon$ в предложении 8 можно сделать сколь угодно малым и в приведенных оценках оно не играет никакой роли, так как оцениваемая величина целочисленна. Чтоб не загромождать запись будем полагать, что $\varepsilon = 0$. Обозначим $\varphi\left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) = \alpha W \geq W - \Delta \stackrel{def}{=} \max\limits_{(\overline{x}, \overline{y}) \in \Pi(G_1) \times \Pi(G_2)} \psi\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$. Здесь $\Delta$—вес минимального вершинного покрытия.

Ясно, что 2-аппроксимирующий алгоритм теоретически никак не обоснован в случае, если максимальное допустимое множество имеет вес меньший половины суммы всех весов вершин. Поэтому рассмотрим случай, когда $\alpha \geq \alpha' \stackrel{def}{=} \frac{MaxCMS}{W} \geq \frac{1}{2}$. Из предложения 8 получим:

$$\max_{(\overline{x}, \overline{y}) \in \Pi(G_1) \times \Pi(G_2)} \psi\left(\overline{x}, \overline{y}\right) - \psi\left(\overline{x^*}, \overline{y^*}\right) \leq \alpha(1-\alpha)W \leq \alpha'(1-\alpha')W = \alpha'\Delta$$

что означает, что алгоритм аппроксимирует минимальное вершинное покрытие с константой $1 + \alpha' \leq 2$. Если рассматривать задачу MaxCMS как задачу удаления «шума» из почти монотонной выборки, то это означает, что при малой зашумленности, то есть при $\alpha' \approx 1$, алгоритм будет в худшем случае удалять в 2 раза больше объектов, чем минимально возможное число, равное $\Delta$. Это полностью соответствует стандартной оценке аппроксимации. Однако, как показывает оценка, наш алгоритм, при сколь угодно сильно зашумленных выборках, например, если шум составляет половину всех элементов выборки, не удалит больше чем $\Delta + \frac{1}{4}W$. Более того, предложение 8 позволяет получить оценку излишне удаленных объектов и для случая, когда шум составляет большую часть выборки($\alpha \leq \frac{3}{8}$). Таким образом, ограничение задачи MaxCMS на 2-MaxCMS позволяет получить приближенный алгоритм с лучшими оценками аппроксимации чем у классического. Заметим, что этот алгоритм приближенно находит минимальное вершинное покрытие для любого орграфа, множество вершин которого может быть разбито на 2 частичных порядка.

# Литература


[1] Боднарчук В.Т., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Ромов Б.А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика, 1969, № 3, 1–10, № 5, 1–9.

[2] Бонгард М.М. Проблема узнавания. М.: Наука, 1967. 320 с.

[3] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М. Мир. 1982.

[4] Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1976. 511 с.

[5] Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций // М. ФИЗМАТЛИТ. 2004.

[6] Минский М., Пейперт С. Персептроны. М.:Мир, 1971.262 с.

[7] Нильсон Н. Искусственный интеллект. Методы поиска решений. М.: Мир, 1973. 272 с.

[8] Патрик Э. Основы теории распознавания образов. М.: Советское радио, 1980. 408 с.

[9] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. М.: Мир, 1991. 360 с.

[10] Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М.: Мир. 1978. 416 с.

[11] Хачиян Л.Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады АН СССР, 1979, том 244, с.1093-1096.

[12] Юдин Д.Б., Немировский А.С. Оценка информационной сложности задач математического программирования // Экономика и математические методы, 1976, т.12, вып. 2, с. 357

[13] Bulatov A. A Dichotomy Theorem for Constraints on a Three-Element Set // FOCS, 2002, pp.649-658.

[14] Bulatov A., Dalmau V. Mal'tsev constraints are tractable // SIAM Journal on Computing, 2006, 36, № 1, pp.16-27.

[15] Creignou N., Khanna S., Sudan M. Complexity Classification of Boolean Constraint Satisfaction Problems, volume 7 of Monographs on Discrete Mathematics and Applications. SIAM, 2001.

[16] Cook S.A. The complexity of theorem proving procedures // Procs. 3rd ACM Symposium on Theory of Computing 1971.

[17] Edmonds J., Karp R.M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems // Journal of the ACM, 1972, 19, № 2, pp.248-264.

[18] Geiger D. Closed Systems of Functions and Predicates // Pacific Journal of Mathematics, 1968, № 27, pp.95-100.

[19] Grotshel M., Lovasz L., Schrijver A. (1988). Geometric algorithms and combinatorial optimization. Springer-Verlag, Berlin Geidelberg New York.

[20] Hochbaum D. S. Approximation algorithms for the set covering and vertex cover problems // SIAM Journal on Computing, 11:555–556, 1982.

[21] Iwata S., Fleischer L., Fujishige S. A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions // Proceedings of the 32rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 2000, pp.96-107.

[22] Jeavons P. On the Algebraic Structure of Combinatorial Problems // Theoretical Computer Science, 1998, 200, № 1-2, pp.185-204.

[23] Jeavons P.G., Cohen D.A., Gyssens M. Closure properties of constraints // Journal of the ACM, 44:527–548, 1997.

[24] Jeavons P.G., Cooper M.C. Tractable constraints on ordered domains // Artificial Intelligence 79 (1996), pp. 327–339.

[25] Mohring R.H. (1985). Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs. In Graphs and Order, pp.41-101. Dordrecht: Reidel.

[26] Post E. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, 1941, № 5.

[27] Sill J., Abu-Mostafa Y. S. Monotonicity hints // Advances in neural information Processing systems, 1997, № 9, pp. 634-640. Press.